



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a V-a

**Problema 1.** Fie  $x$  și  $y$  două numere naturale nenule astfel încât  $2015^x - 2013 = x + y$ .  
Verificați dacă  $y$  este pătrat perfect, știind că:

$$3x + 6x + 9x + \dots + 102x = 3570.$$

*Grațiela Popa, Slatina*

**Problema 2.** Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 și restul 100, iar diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților numărului este egală cu 4. Aflați numărul.

*Mihai Ilie, Slatina*

**Problema 3.** Fie  $A$  un număr natural care nu se divide cu 5 și  $B$  câtul împărțirii lui  $A$  la 5. Notăm cu  $u(A)$  ultima cifră a lui  $A$ . Arătați că dacă  $u(A) < 5$  atunci  $B$  este număr par, iar dacă  $u(A) > 5$ , atunci  $B$  este număr impar.

*Gazeta Matematică nr. 10/2014*

**Problema 4.** Pe o farfurie pătrată, cu lungimea laturii de 25 cm, se așază biscuiți de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 4 cm și lățimea de 2 cm, fără a depăși marginile farfuriei. Biscuiții vin în pachete de câte 15 bucăți.

- Arătați că oricum am așeza biscuiții din 5 pachete, aceștia nu pot acoperi complet farfuria.
- Arătați că dacă pe farfurie se pun biscuiții din 16 pachete, există cel puțin 4 biscuiți care se suprapun (nu neapărat complet).

*Marius Perianu, Slatina*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore și 30 de minute.



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a VI-a

**Problema 1.** Determinați cifrele  $a, b, c, d$  știind că  $\overline{abcd} = 1,0a6 \cdot \overline{8625}$ .

*Gazeta Matematică nr. 9/2014*

**Problema 2.** Împărțind numărul natural nenul  $m$  pe rând la 7, 8 și 9 obținem resturile 1, 4, respectiv 7, iar împărțind numărul natural nenul  $n$  pe rând la 8 și 9 obținem resturile 5, respectiv 7.

Arătați că fracția  $\frac{m+20}{n+11}$  este reductibilă cu 72.

*Ion Neață, Slatina*

**Problema 3.** Arătați că numărul  $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2039}$  este divizibil cu 2015.

*Daniel Cojocaru, Slatina*

**Problema 4.** Se consideră punctele coliniare  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2015}$  în această ordine, astfel încât  $M_1M_2 = 2$  cm,  $M_2M_3 = 2M_1M_2$ ,  $M_3M_4 = 2M_2M_3$ , ...,  $M_{2014}M_{2015} = 2M_{2013}M_{2014}$ .

a) Calculați lungimea segmentului  $[M_1M_{200}]$ .

b) Comparați lungimile segmentelor  $[M_1M_{200}]$  și  $[M_{200}M_{300}]$ .

c) Demonstrați că pentru orice numere naturale  $a, b, c, d$ , cu  $1 \leq a < b \leq c < d \leq 2015$ , segmentele  $[M_aM_b]$  și  $[M_cM_d]$  au lungimi diferite.

*Dorin Popa, Slatina*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore și 30 de minute.

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a VII-a

**Problema 1.** Se consideră pătratul  $ABCD$  în care se notează cu  $M$  mijlocul laturii  $[AB]$ . Fie  $E$  punctul de intersecție al dreptelor  $BD$  și  $CM$ . Arătați că  $DM \perp AE$ .

*Grațiela Popa, Slatina*

**Problema 2.** a) Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a, b, c$  are loc relația  $|a+b|+|a+c| \geq |b-c|$ .  
b) Demonstrați că pentru orice număr real  $x$  are loc inegalitatea:

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+\dots+|x+2014| \geq 1007^2.$$

*Gazeta Matematică nr. 11/2014*

**Problema 3.** Se consideră numărul natural  $n = \overline{abcd}$  și  $x = \sqrt{\overline{ab, (cd) + bc, (da) + cd, (ab) + da, (bc)}}$ , unde  $a, b, c, d$  sunt cifre nenule.

- a) Știind că  $x$  este rațional, determinați cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua  $n$ .  
b) Arătați că dacă  $x$  este număr natural, atunci  $n$  are cel puțin două cifre egale.

*Marius Perianu, Slatina*

**Problema 4.** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $D, E, F \in (BC)$  astfel încât  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $[AE]$  este bisectoarea unghiului  $BAD$  și  $[AF]$  este bisectoarea unghiului  $CAD$ . Arătați că:

$$AE \cdot \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = AF \cdot \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right).$$

*Ion Neață, Slatina*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a VIII-a

**Problema 1.** a) Demonstrați că, pentru orice numere reale  $x, y, z, t$  are loc egalitatea:

$$(xz + yt)^2 + (xt - yz)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$$

b) Numerele raționale pozitive  $a, b, c, d$  verifică simultan egalitățile:

$$a^2 + b^2 = 9, \quad c^2 + d^2 = 16, \quad ac + bd = 12.$$

Arătați că numărul  $\frac{a\sqrt{3} + b}{c\sqrt{3} + d}$  este rațional.

*Ion Neață, Slatina*

**Problema 2.** Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuația:

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$

*Gazeta Matematică nr. 9/2014*

**Problema 3.** Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  care verifică egalitatea

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{a - 2014} + \sqrt{b + 2014} - 2 - \frac{a + b}{2} = 0.$$

*Iuliana Trașcă, Scornicești*

**Problema 4.** Se consideră rombul  $ABCD$  în care  $AB = 6$  cm și  $m(\angle BAD) = 60^\circ$ . De aceeași parte a planului  $(ABC)$  se ridică perpendicularele  $AM$  și  $CQ$  pe planul  $(ABC)$  astfel încât  $AM = 9$  cm și  $CQ = 3$  cm.

a) Demonstrați că planele  $(MBD)$  și  $(QBD)$  sunt perpendiculare.

b) Calculați distanța dintre dreptele  $BD$  și  $MQ$ .

c) Determinați cosinusul unghiului format de planele  $(MBQ)$  și  $(ABC)$ .

*Dorin Popa, Slatina*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a V-a

**Problema 1.** Fie  $x$  și  $y$  două numere naturale nenule astfel încât  $2015^x - 2013 = x + y$ .

Verificați dacă  $y$  este pătrat perfect, știind că:

$$3x + 6x + 9x + \dots + 102x = 3570.$$

*Grațîela Popa, Slatina*

#### Soluție și barem de corectare

$$3x \cdot (1 + 2 + \dots + 34) = 3570 \quad \dots\dots\dots (1p)$$

$$x = 2 \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$y = 2014 \cdot 2015 \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Justificarea faptului că } y \text{ nu este pătrat perfect } (2014^2 < y < 2015^2 \text{ sau alt mod}) \quad \dots\dots\dots (2p)$$

**Problema 2.** Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 și restul 100, iar diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților numărului este egală cu 4. Aflați numărul.

*Mihai Ilie, Slatina*

#### Soluție și barem de corectare

$$\overline{abc} = 2 \cdot \overline{cba} + 100 \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$98a = 10b + 19c + 100 \quad \dots\dots\dots (1p)$$

$$a = c + 4 \Rightarrow 10b + 19c = 292 \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$b = 9, c = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 692 \quad \dots\dots\dots (2p)$$

**Problema 3.** Fie  $A$  un număr natural care nu se divide cu 5 și  $B$  câtul împărțirii lui  $A$  la 5. Notăm cu  $u(A)$  ultima cifră a lui  $A$ . Arătați că dacă  $u(A) < 5$  atunci  $B$  este număr par, iar dacă  $u(A) > 5$ , atunci  $B$  este număr impar.

*Ion Voicu, Gazeta Matematică nr. 10/2014*

#### Soluție și barem de corectare

$$\text{Fie } k \text{ câtul împărțirii lui } A \text{ la } 10; \text{ atunci } A = 10k + u(A) \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Notând cu } r \text{ restul împărțirii lui } A \text{ la } 5, \text{ rezultă } A = 5B + r, r \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \dots\dots\dots (1p)$$

Dacă  $u(A) < 5$ , atunci restul împărțirii lui  $A$  la 5 este  $u(A)$ , deci  $5B + u(A) = 10k + u(A)$ , de unde

$$\text{rezultă că } B = 2k, \text{ adică } B \text{ este par} \quad \dots\dots\dots (2p)$$

Dacă  $u(A) > 5$ , atunci restul împărțirii lui  $A$  la 5 este  $u(A) - 5$ , deci  $5B + u(A) - 5 = 10k + u(A)$ , de unde

$$\text{rezultă că } B = 2k + 1, \text{ adică } B \text{ este impar} \quad \dots\dots\dots (2p)$$

- Problema 4.** Pe o farfurie pătrată, cu lungimea laturii de 25 cm, se așază biscuiți de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 4 cm și lățimea de 2 cm, fără a depăși marginile farfuriei. Biscuiții vin în pachete de câte 15 bucăți.
- a)** Arătați că oricum am așeza biscuiții din 5 pachete, aceștia nu pot acoperi complet farfuria.
- b)** Arătați că dacă pe farfurie se pun biscuiții din 16 pachete, există cel puțin 4 biscuiți care se suprapun (nu neapărat complet).

*Marius Perianu, Slatina*

**Soluție și barem de corectare**

- a)** Aria farfuriei este de  $25 \times 25 = 625 \text{ cm}^2$  ..... (1p)  
Dacă nu se suprapun, biscuiții dintr-un pachet acoperă  $15 \times 2 \times 4 = 120 \text{ cm}^2$  ..... (1p)  
Rezultă că biscuiții din 5 pachete acoperă cel mult  $600 \text{ cm}^2$ , deci nu acoperă complet farfuria ..... (1p)
- b)** Biscuiții din 16 pachete acoperă o suprafață de  $1920 \text{ cm}^2$  ..... (2p)  
Așezând biscuiții pe cel mult 3 „straturi”, aceștia ar trebui să acopere de cel mult trei ori suprafața farfuriei, adică  $3 \times 625 = 1875 \text{ cm}^2 < 1920 \text{ cm}^2$ , deci există cel puțin 4 biscuiți care se suprapun ..... (2p)

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a VI-a

**Problema 1.** Determinați cifrele  $a, b, c, d$  știind că  $\frac{\overline{abcd}}{8625} = \overline{1,0a6}$ .

*Costel Anghel, Gazeta Matematică nr. 9/2014*

#### Soluție și barem de corectare

Din enunț rezultă  $8 \cdot \overline{abcd} = 69 \cdot \overline{10a6}$  ..... (3p)

$8 | \overline{10a6} \Rightarrow a \in \{1, 5, 9\}$  ..... (1p)

Pentru  $a = 1$  rezultă  $\overline{abcd} = 8763$ , deci  $a$  este simultan 1 și 8, absurd ..... (1p)

Pentru  $a = 5$  rezultă  $\overline{abcd} = 9108$ , deci  $a$  este simultan 5 și 9, absurd ..... (1p)

Pentru  $a = 9$  rezultă  $\overline{abcd} = 9453$ , care convine, deci  $a = 9, b = 4, c = 5, d = 3$  ..... (1p)

**Problema 2.** Împărțind numărul natural nenul  $m$  pe rând la 7, 8 și 9 obținem resturile 1, 4, respectiv 7, iar împărțind numărul natural nenul  $n$  pe rând la 8 și 9 obținem resturile 5, respectiv 7.

Arătați că fracția  $\frac{m+20}{n+11}$  este reductibilă cu 72.

*Ion Neață, Slatina*

#### Soluție și barem de corectare

$m = 7c_1 + 1, m = 8c_2 + 4, m = 9c_3 + 7$ , unde  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$  ..... (1p)

$7 | m + 20, 8 | m + 20, 9 | m + 20$  ..... (1p)

$[7, 8, 9] | m + 20 \Rightarrow 504 | m + 20$ , deci numărătorul se divide cu 72 ..... (1p)

$n = 8d_1 + 5, n = 9d_2 + 7$ , unde  $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$  ..... (1p)

$8 | n + 11, 9 | n + 11$  ..... (1p)

$[8, 9] | n + 11 \Rightarrow 72 | n + 11$ , deci și numărătorul se divide cu 72 ..... (1p)

Ca urmare, fracția  $\frac{m+20}{n+11}$  este reductibilă cu 72 ..... (1p)

**Problema 3.** Arătați că numărul  $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2039}$  este divizibil cu 2015.

*Daniel Cojocaru, Slatina*

#### Soluție și barem de corectare

Cum  $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ , vom arăta că  $A$  este divizibil cu fiecare din numerele 5, 13, 31 ..... (1p)

Cum  $A$  are 2040 de termeni, ei se pot grupa câte 4, deoarece  $4 | 2040$ ; rezultă

$$A = (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^4(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{2036}(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$$

și, cum  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15 = 5 \cdot 3$ , rezultă că  $5 | A$  ..... (2p)

Grupând termenii câte 5 (este posibil, deoarece  $5 | 2040$ ), rezultă

$$A = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{2035}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

și, cum  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ , rezultă că  $31 | A$  ..... (2p)

Grupând termenii câte 12 (la fel, este posibil, deoarece  $12 \mid 2040$ ), rezultă

$$A = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{11}) + 2^{12}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{11}) + \dots + 2^{2028}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{11})$$

și, cum  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{11} = 4095 = 13 \cdot 315$ , rezultă că  $31 \mid A$  ..... (2p)

**Problema 4.** Se consideră punctele coliniare  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2015}$  în această ordine, astfel încât  $M_1M_2 = 2$  cm,  $M_2M_3 = 2M_1M_2$ ,  $M_3M_4 = 2M_2M_3$ , ...,  $M_{2014}M_{2015} = 2M_{2013}M_{2014}$ .

a) Calculați lungimea segmentului  $[M_1M_{200}]$ .

b) Comparați lungimile segmentelor  $[M_1M_{200}]$  și  $[M_{200}M_{300}]$ .

c) Demonstrați că pentru orice numere naturale  $a, b, c, d$ , cu  $1 \leq a < b \leq c < d \leq 2015$ , segmentele  $[M_aM_b]$  și  $[M_cM_d]$  au lungimi diferite.

*Dorin Popa, Slatina*

#### Soluție și barem de corectare

a)  $M_2M_3 = 2^2$ ,  $M_3M_4 = 2^3$ ,  $M_{2014}M_{2015} = 2^{2014}$  ..... (1p)

$M_1M_{200} = 2^{100} - 2$  ..... (1p)

b)  $M_{200}M_{300} = 2^{300} - 2^{200}$  ..... (1p)

$2^{200} - 2 < 2^{300} - 2^{200} \Rightarrow M_1M_{200} < M_{200}M_{300}$  ..... (1p)

c) Presupunând că există numerele naturale  $a, b, c, d$ , cu  $1 \leq a < b \leq c < d \leq 2015$  astfel încât

$M_aM_b = M_cM_d$ , rezultă  $2^b - 2^a = 2^d - 2^c$  ..... (1p)

Împărțind prin  $2^a$  rezultă  $2^{b-a} - 1 = 2^{d-a} - 2^{c-a}$ , imposibil, deoarece membrul stâng este un număr impar, iar membrul drept este număr par, deci presupunerea făcută este falsă ..... (2p)



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VII-a

**Problema 1.** Se consideră pătratul  $ABCD$  în care se notează cu  $M$  mijlocul laturii  $[AB]$ . Fie  $E$  punctul de intersecție al dreptelor  $BD$  și  $CM$ . Arătați că  $DM \perp AE$ .

*Grațiana Popa, Slatina*

**Soluție și barem de corectare**

$E$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  ..... (2p)

Notând  $\{N\} = AE \cap BC$ , rezultă că  $N$  este mijlocul lui  $[BC]$  ..... (2p)

$\triangle BAN \equiv \triangle ADM \Rightarrow \angle BAN \equiv \angle ADM$  ..... (2p)

Cum  $m(\angle ADM) + m(\angle DAE) = 90^\circ$ , rezultă că  $DM \perp AE$  ..... (1p)

**Problema 2.** a) Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a, b, c$  are loc relația  $|a+b|+|a+c| \geq |b-c|$ .

b) Demonstrați că pentru orice număr real  $x$  are loc inegalitatea:

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+\dots+|x+2014| \geq 1007^2.$$

*Liliana Puț, Gazeta Matematică nr. 11/2014*

**Soluție și barem de corectare**

a) Se știe că  $|x+y| \leq |x|+|y|$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  ..... (1p)

Atunci  $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$ , de unde, pentru  $x=a+b$ ,  $y=a+c$ , se obține

relația  $|a+b|+|a+c| \geq |b-c|$  din enunț ..... (2p)

b) Pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, 1007\}$ , conform relației de la a), rezultă  $|x+k|+|x+k+1007| \geq 1007$  ..... (2p)

Adunând aceste relații pentru  $k \in \{1, 2, \dots, 1007\}$  se obține inegalitatea din enunț ..... (2p)

**Problema 3.** Se consideră numărul natural  $n = \overline{abcd}$  și  $x = \sqrt{\overline{ab, (cd)} + \overline{bc, (da)} + \overline{cd, (ab)} + \overline{da, (bc)}}$ , unde  $a, b, c, d$  sunt cifre nenule.

a) Știind că  $x$  este rațional, determinați cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua  $n$ .

b) Arătați că dacă  $x$  este număr natural, atunci  $n$  are cel puțin două cifre egale.

*Marius Perianu, Slatina*

**Soluție și barem de corectare**

a)  $\overline{ab, (cd)} + \overline{bc, (da)} + \overline{cd, (ab)} + \overline{da, (bc)} = \frac{100(a+b+c+d)}{9}$  ..... (3p)

Atunci  $x = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{a+b+c+d}$ , deci  $x$  este rațional dacă și numai dacă  $a+b+c+d$  este pătrat perfect ... (1p)

Dintre cifrele  $a, b, c, d$ , cel mult una poate fi egală cu 9, deci  $a+b+c+d \in \{4, 9, 16, 25\}$ , iar valoarea

maximă a lui  $n$  se obține pentru  $a+b+c+d = 25$  și este 9871 ..... (1p)

b) Dacă  $x$  este natural, atunci  $a+b+c+d = 9$  ..... (1p)

Presupunând că  $a, b, c, d$  sunt diferite, ar rezulta că  $a+b+c+d \geq 1+2+3+4 = 10$ , absurd ..... (1p)

**Problema 4.** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $D, E, F \in (BC)$  astfel încât  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $[AE]$  este bisectoarea unghiului  $BAD$  și  $[AF]$  este bisectoarea unghiului  $CAD$ . Arătați că:

$$AE \cdot \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = AF \cdot \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right).$$

*Ion Neață, Slatina*

**Soluție și barem de corectare**

$$(AE \text{ este bisectoare în } \triangle ABD \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{EB+ED}{ED} = \frac{AB+AD}{AD} \Rightarrow ED = \frac{AD \cdot BD}{AB+AD} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Analog, } (AF \text{ este bisectoare în } \triangle ACD, \text{ de unde } FD = \frac{AD \cdot CD}{AC+AD} \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Aplicând acum teorema bisectoarei în triunghiul } AEF, \text{ rezultă } \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF} = \frac{AC+AD}{AB+AD} \cdot \frac{DB}{DC} \dots\dots\dots (2p)$$

Cum  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ , rezultă:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC+AD}{AB+AD} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}}, \text{ de unde } AE \cdot \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = AF \cdot \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right) \dots\dots\dots (2p)$$

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

### Clasa a VIII-a

**Problema 1.** a) Demonstrați că, pentru orice numere reale  $x, y, z, t$  are loc egalitatea:

$$(xz + yt)^2 + (xt - yz)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$$

b) Numerele raționale pozitive  $a, b, c, d$  verifică simultan egalitățile:

$$a^2 + b^2 = 9, \quad c^2 + d^2 = 16, \quad ac + bd = 12.$$

Arătați că numărul  $\frac{a\sqrt{3} + b}{c\sqrt{3} + d}$  este rațional.

*Ion Neață, Slatina*

**Soluție și barem de corectare**

a) Verificare directă ..... (2p)

b) Din relația de la a) rezultă  $(ad - bc)^2 = 0$ , de unde  $ad = bc$  sau  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ..... (2p)

Atunci  $\frac{a\sqrt{3} + b}{c\sqrt{3} + d} = \frac{b\left(\frac{a}{b} \cdot \sqrt{3} + 1\right)}{d\left(\frac{c}{d} \cdot \sqrt{3} + 1\right)} = \frac{b}{d}$ , care este număr rațional ..... (3p)

**Problema 2.** Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuația:

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$

*Constantin Apostol, Gazeta Matematică nr. 9/2014*

**Soluție și barem de corectare**

Înmulțind cu 2, egalitatea din enunț se scrie echivalent  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + 3x^2 + 3y^2 = 14$  ..... (3p)

Atunci  $3x^2 \leq 14$ , de unde  $|x| \leq 2$ , adică  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  ..... (2p)

Verificând fiecare caz în parte, se obține o singură soluție, și anume  $x = y = 1$  ..... (2p)

**Problema 3.** Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  care verifică egalitatea

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{a - 2014} + \sqrt{b + 2014} - 2 - \frac{a + b}{2} = 0.$$

*Iuliana Trașcă, Scornicești*

**Soluție și barem de corectare**

Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{a - 2014} = \sqrt{3 \cdot (a - 2014)} \leq \frac{3 + a - 2014}{2} = \frac{a - 2011}{2} \quad \text{..... (1p)}$$

$$\sqrt{b + 2014} = \sqrt{1 \cdot (b + 2014)} \leq \frac{1 + b + 2014}{2} = \frac{b + 2015}{2} \quad \text{..... (1p)}$$

$$\text{Atunci } \sqrt{3} \cdot \sqrt{a - 2014} + \sqrt{b + 2014} \leq \frac{a - 2011 + b + 2015}{2} = 2 + \frac{a + b}{2} \quad \text{..... (1p)}$$

Relația din enunț corespunde situațiilor de egalitate din inegalitățile de mai sus, deci  $a - 2014 = 3$  și

$b + 2014 = 1$ , de unde  $a = 2017$  și  $b = -2013$  ..... (1p)

**Problema 4.** Se consideră rombul  $ABCD$  în care  $AB = 6$  cm și  $m(\angle BAD) = 60^\circ$ . De aceeași parte a planului  $(ABC)$  se ridică perpendicularele  $AM$  și  $CQ$  pe planul  $(ABC)$  astfel încât  $AM = 9$  cm și  $CQ = 3$  cm.

- Demonstrați că planele  $(MBD)$  și  $(QBD)$  sunt perpendiculare.
- Calculați distanța dintre dreptele  $BD$  și  $MQ$ .
- Determinați cosinusul unghiului format de planele  $(MBQ)$  și  $(ABC)$ .

*Dorin Popa, Slatina*

**Soluție și barem de corectare**

a)  $m(\angle MOA) = 60^\circ$ ,  $m(\angle QOC) = 30^\circ$  ..... (1p)

Măsura unghiului plan corespunzător diedrului este  $m(\angle MOQ) = 90^\circ$ , deci  $(MBD) \perp (QBD)$  ..... (1p)

b) Fie  $\{O\} = AC \cap BD$ ; construind  $OP \perp MQ$  se arată că  $d(BD, MQ) = OP$  ..... (1p)

$OP = 3\sqrt{3}$  cm ..... (1p)

c) Proiecția triunghiului  $MBQ$  pe planul  $ABC$  este triunghiul  $ABC$  ..... (1p)

Aria triunghiului  $ABC$  este  $9\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, iar aria triunghiului  $BMQ$  este 36 cm<sup>2</sup> ..... (1p)

Notând  $\alpha = (MBQ), (ABC)$ , avem  $S_{ABC} = S_{MBQ} \cdot \cos \alpha$ , de unde  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$  ..... (1p)